新古典派成長論の計算レジュメ

問題

新古典派の経済成長モデルが次のように示されています。

$Y = 0.4K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}$

$Y = C + I$

$C = 0.8Y$

$K_{t+1} = K + I$

$L_{t+1} = 1.02L$

（Y：産出量、K：資本量、L：労働量、C：消費、I：投資）

このとき、資本・労働比率 $\frac{K}{L}$ は時間の経過とともにいくらの値に収束しますか。

1．12　2．16　3．20　4．24　5．28

（国家Ⅱ種　改題）

計算式で求めるケース

動画解説：https://youtu.be/70jp-MdumPk

プロセス－１　**ハロッド＝ドーマー・モデルの式を確認します。**

Gw（保証成長率）と Gn（自然成長率）の均斉成長が実現します。しかし、それが達成されるのは偶然に過ぎないもので不安定なものだと説明されました。

Gw（保証成長率）　＝　Gn（自然成長率）

$$\frac{s}{w} = n$$

（s：貯蓄率、w：資本係数、n：労働人口増加率）

これを変形させていきます。

$$\frac{s}{w} = n$$

$$\downarrow$$

$$s \times \frac{1}{w} = n$$ 分数の形を分解します。

$$s \times \frac{Y}{K} = n$$

$$\frac{s \times Y}{K} = n$$

資本係数 (w) は、

$$w = \frac{K}{Y}$$

（K：資本量、Y：産出量）

で表されるので、逆数なら

$$\frac{1}{w} = \frac{Y}{K}$$

になります。

プロセス－２　新古典派成長論の式に構成

新古典派の経済成長モデルは、「労働者１人あたりの～」のという視点でハロッド＝ドーマー・モデルの式を再構築していきます。

$$\frac{s \times \boxed{Y}}{\boxed{K}} = n$$

Y → 労働者１人あたりの産出量にするためにＬで割り算します。 → $\frac{Y}{L} = y = f(k)$

これをｙ、または f(*k*) とします。

K → 労働者１人あたりの資本量にするためにＬで割り算します。 → $\frac{K}{L} = k$

これを *k* とします。

◆分数は分母・分子を同じ数字で掛け・算割り算できます。

プロセス－３　定常状態の条件式

新古典派の経済成長モデルは常に定常状態（長期均衡）が安定的で、Gw（保証成長率）とGn（自然成長率）の均斉成長が実現します。計算問題はこの状態を前提として、次の条件式に数値をあてはめて解くことになります。

Gw（保証成長率）　＝　Gn（自然成長率）

$$\frac{s \times f(k)}{k} = n$$

ただし、$\frac{Y}{L} = f(k)$（１人あたりの産出量）　　$\frac{K}{L} = k$（１人あたりの資本量）

そして、ｓが貯蓄率とします。

◆補足

自然成長率（Gn）は、今期のＬが前期1.02Ｌとどのくらい増加したのかということなので、

$$\frac{\Delta L}{L} = 0.02$$

プロセス－４　必要な数字を集める

条件式で用意するのは、①ｓ（貯蓄率）、　②$f(k) = \frac{Y}{L}$、③ $k = \frac{K}{L}$、それと④ｎです。問題では、$k = \frac{K}{L}$ を求めることになっています。

まず、①は消費性向が0.8なので、貯蓄性向（貯蓄率）ｓ＝0.2です。また、自然成長率（ｎ）も問題の式より、ｎ＝0.02だとわかります。計算が必要なのは②になるので、以下で求めます。

②の f(*k*) を求めます。

$$f(k) = \frac{Y}{L} = \frac{0.4K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}}{L} = 0.4K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}} \times L^{-1} = 0.4K^{\frac{1}{2}}L^{-\frac{1}{2}} = 0.4\left(\frac{K}{L}\right)^{\frac{1}{2}}$$

ここで、$\frac{K}{L} = k$ なので、これを代入すると、

$f(k) = 0.4k^{\frac{1}{2}}$ に整理ができます。

◆補足

指数計算

$$\frac{1}{L} = L^{-1}$$

$$A^n \times A^m = A^{m+n}$$

プロセス－５　**数式を代入して解答します**

新古典派成長モデル

$$\frac{s \times f(k)}{k} = n$$　に、s、n、f(k) の数値をあてはめます。

$$\frac{0.2 \times 0.4k^{\frac{1}{2}}}{k} = 0.02$$　（両辺に k をかけ算して整理）

$$4k^{\frac{1}{2}} = k$$　（両辺を２乗します）

$$16k = k^2$$　（k で割り算します）

$$k = 16$$　よって、２が正解です。

問題

ソロー・スワンのモデルにおいて、コブ＝ダグラス型の生産関数が、

$Y = K^{0.5}L^{0.5}$ に書き直すことができます。

であるとします。ただし、ある期間において、K は資本ストック、L は労働量、Y は産出量です。また、労働量の成長率が５％で貯蓄率が 0.3 であるとします。さらに、資本減耗や技術革新がないと仮定するとき、定常状態における労働量１単位あたりの資本の大きさ（資本労働比率）はいくらになりますか。

１．4　２．16　３．25　４．36　５．49

（国家一般職　改題）

計算式で求めるケース

動画解説：https://youtu.be/k_5IsLjyr38

プロセス－１　**必要な数字を集める**

ソロー・スワンのモデル（新古典派成長モデル）の式を用意し、数値をあてはめていきます。

Gw（保証成長率）　＝　Gn（自然成長率）

$$\frac{s \times f(k)}{k} = n$$

ただし、$\frac{Y}{L} = f(k)$（１人あたりの産出量）　$\frac{K}{L} = k$（１人あたりの資本の大きさ）

s は貯蓄率とします。

この定常状態の式に用意するのは、①s（貯蓄率）、②f(k) $= \frac{Y}{L}$、③$k = \frac{K}{L}$、それと④n です。問題では、$k = \frac{K}{L}$ を求めることになっています。

まず、①は貯蓄性向 s = 0.3 です。また、④自然成長率は、n = 0.05 です。計算が必要なのは②になります。以下で求めます。

$$f(k) = \frac{Y}{L} = \frac{K^{0.5}L^{0.5}}{L} = K^{0.5}L^{0.5} \times L^{-1} = K^{0.5}L^{-0.5} = \left(\frac{K}{L}\right)^{0.5}$$

ここで、$\frac{K}{L} = k$ なので、これを代入すると、

$f(k) = k^{0.5}$ に整理ができます。

プロセス－2 **数式を代入して解答をだします。**

$\frac{s \times f(k)}{k} = n$ より、s、n、$f(k)$ の数値をあてはめます。

$$\frac{0.3 \times k^{0.5}}{k} = 0.05$$

$0.3k^{0.5} = 0.05k$ （両辺に k をかけ算します）

$30k^{0.5} = 5k$ （整数の形にします）

$900k = 25k^2$ （2 乗します）

$36 = k$ （25 k で割り算します）

労働量 1 単位あたりの資本の大きさ (k) は 36 になります。

以上より、 4 が正解です。

グラフで求めるケース

動画解説：https://youtu.be/yjnvw7R-lYA

プロセス－１ **新古典派成長論の式に構成**

新古典派の経済成長モデルは、「労働者 1 人あたりの～」のという視点でハロッド＝ドーマー・モデルの式を再構築していきます。

ハロッド＝ドーマー・モデル

Gw（保証成長率） ＝ Gn（自然成長率）

$$\frac{s}{w} = n$$

ここで、$\frac{1}{w} = \frac{Y}{K}$ より、以下のように書き換えられます。

$$\frac{s \times \boxed{Y}}{\boxed{K}} = n$$

労働者 1 人あたりの産出量にするために L で割り算します。 → $\frac{Y}{L} = y$

これを y、または f(k) とします。

労働者 1 人あたりの資本量にするために L で割り算します。 → $\frac{K}{L} = k$

これを k とします。

◆補足

指数計算

$\frac{1}{L} = L^{-1}$

$A^n \times A^m = A^{m+n}$

◆分数は分母・分子を同じ数字で掛け・算割り算できます。

$$\frac{s \times \overbrace{\boxed{Y}}^{=y}}{\underbrace{\boxed{K}}_{=k}} = n$$　　として、

長期均衡の式はこのようになります。

Gw（保証成長率）　＝　Gn（自然成長率）

$$\frac{s \times y}{k} = n$$　（両辺に k を掛け算します）

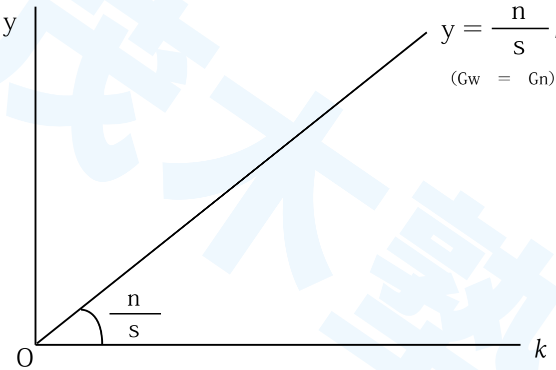
$$s\,y = n\,k$$　（両辺を s で割り算します）

$$y = \frac{n\,k}{s}$$ または、 $$y = \frac{n}{s}k$$ になります。

プロセス－２　グラフ化

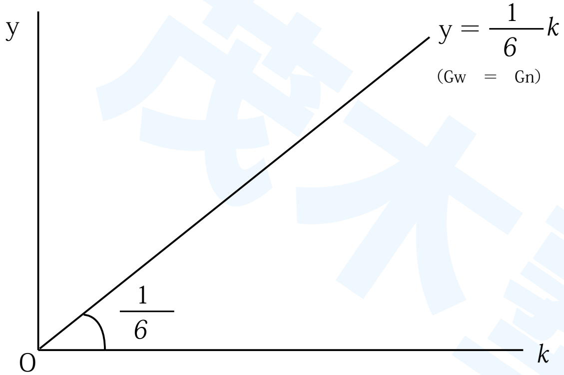
$$y = \underbrace{\boxed{\frac{n}{s}}}_{\text{傾き}} k$$

$y = \frac{n}{s}k$　は、傾き $\frac{n}{s}$ の一次関数になるので、下図のように書き表せます。



問題文で与えられている労働量の成長率（n）が５％、貯蓄率（s）が 0.3 を代入します。

$$y = \frac{\boxed{n} \rightarrow 0.05}{\boxed{s} \rightarrow 0.3}\,k \quad より、\quad y = \frac{0.05}{0.3}\,k \quad 整理して、\quad y = \frac{1}{6}k$$



理論上、望ましい成長経路としてのグラフが完成します。

プロセス－３　現実の成長経路

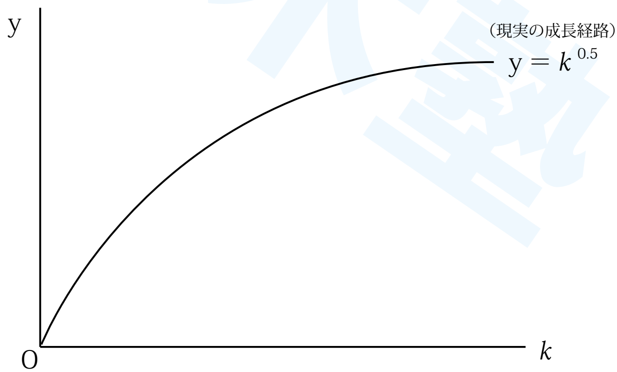
次に、現実の成長経路をグラフ化させます。現実の成長経路というのは問題文のコブ＝ダグラス型の生産関数より、1 人あたりの産出量（y）によって求められます。

コブ＝ダグラス型の生産関数

$Y = K^{0.5}L^{0.5}$ より、労働者 1 人あたりの産出量は、

$$y = \frac{Y}{L} = \frac{K^{0.5}L^{0.5}}{L} = K^{0.5}L^{0.5} \times L^{-1} = K^{0.5}L^{-0.5} = \left(\frac{K}{L}\right)^{0.5}$$

ここで、$\frac{K}{L} = k$ なので、これを代入すると、$y = k^{0.5}$ になります。



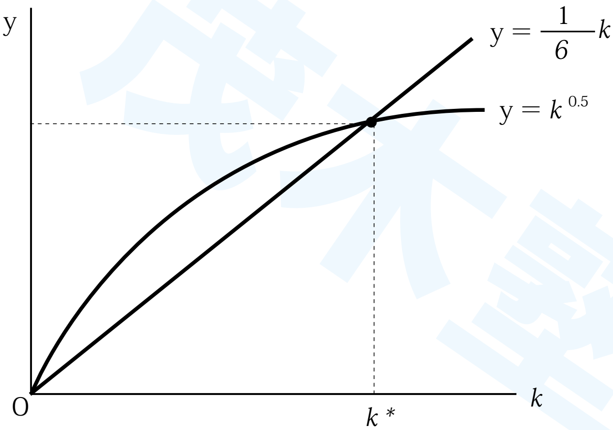
◆補足

指数計算

$\frac{1}{L} = L^{-1}$

$A^n \times A^m = A^{m+n}$

プロセス－４　**グラフをまとめる**



新古典派成長モデルでは、定常状態が維持されるので、２つのグラフの連立方程式より、労働者１人あたりの資本の大きさ（k^*）を求めます。

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{6}k \\ y = k^{0.5} \end{cases}$$

より、

$k^{0.5} = \frac{1}{6}k$　（両辺を２乗します）

$k = \frac{1}{36}k^2$　（両辺を 36 倍します）

$36k = k^2$　（両辺を k で割り算します）

$36 = k$

労働量１単位あたりの資本の大きさ (k) は 36 になります。

以上より、４が正解です。

問題

ソローの新古典派成長モデルの枠組みで考えます。マクロ生産関数が次のように与えられているとします。

$Y_t = \sqrt{K_t L_t}$

ここで、Y_t は t 期の産出量、K_t は t 期の資本ストック、L_t は t 期の労働人口です。労働人口は時間を通じて一定で、$L_{t+1} = L_t > 0$ です。一方、資本ストックは貯蓄率を s 、資本減耗を δ とすると、

$K_{t+1} - K_t = sY_t - \delta K_t$

のように増加します。以上において、貯蓄率 s = 0.2、資本減耗率 δ = 0.05 であるとします。資本ストックと労働人口の初期値が正の時、定常状態における労働 1 単位あたりの資本ストックはいくらになりますか。

1．　4　　2．10　　3．16　　4．18　　5．20

（国家一般職　改題）

計算式で求めるケース　動画解説：https://youtu.be/eLbRjoJkdjk

プロセス－１　**ハロッド＝ドーマー・モデルの式を確認します。**

この問題のように、古典派モデルに関する式の中に難解な形の式が混入している場合もありますが、どんな意味なのか考える必要なく、普段、自分が使い慣れている式を使って解いていきます。ただし、この問題ように資本減耗がある場合には、ツールを一部、修正します。

Gw（保証成長率）＝ Gn（自然成長率）

$$\frac{s}{w} = n$$ （s：貯蓄率、w：資本係数、n：労働人口増加率）

ここで、資本減耗がある場合、資本減耗率 δ を保証成長率から引き算することになります。

$$\frac{s}{w} - \delta = n$$

となります。これを扱いやすいように変形させます。

$$\frac{s}{w} - \delta = n$$

$$\downarrow$$

$$s \times \frac{1}{w} - \delta = n$$ 分数の形を分解します。

$$s \times \frac{Y}{K} - \delta = n$$

$$\frac{s \times Y}{K} - \delta = n$$

資本係数 (w) は、

$$w = \frac{K}{Y}$$

（K：資本量、Y：産出量）

で表されるので、逆数なら

$$\frac{1}{w} = \frac{Y}{K}$$

になります。

◆情報

古典派成長論の計算問題は、平方根を前提とした問題となるために、正答が 4 、 9、16、25、36 などの 2 乗の数値になることが多いです。

◆ちょっと

$k^{\frac{1}{2}} = \sqrt{k}$

とも描けます。

◆ちょっと

資本減耗分とは、年数に応じて価値が減少した分で、その分、供給能力も減少します。

プロセス－２　新古典派成長論の式に構成

新古典派の経済成長モデルは､｢労働者１人あたりの～」のという視点でハロッド＝ドーマー・モデルの式を再構築していきます。

$$\frac{s \times \boxed{Y}}{\boxed{K}} - \delta \quad = n$$

労働者１人あたりの産出量にするためにＬで割り算します。

$$\frac{Y}{L} = y = f(k)$$

これをｙ、または f(*k*) とします。

労働者１人あたりの資本量にするためにＬで割り算します。

$$\frac{K}{L} = k$$

これを *k* とします。

◆分数は分母・分子を同じ数字で掛け・算割り算できます。

プロセス－３　定常状態の条件式

新古典派の経済成長モデルは常に定常状態（長期均衡）が安定的で､Gw（保証成長率）とGn（自然成長率）の均斉成長が実現します。計算問題はこの状態を前提として、次の条件式に数値をあてはめて解くことになります。

Gw（保証成長率）　＝　Gn（自然成長率）

$$\frac{s \times f(k)}{k} - \delta \quad = n$$

Gw（保証成長率）は、資本減耗分（δ）を差引ます。

プロセス－4　必要な数字を集める

Gw（保証成長率）　＝　Gn（自然成長率）

$$\frac{s \times f(k)}{k} - \delta = n$$

の定常状態の条件にあてはめます。

ただし、$\frac{Y}{L} = f(k)$（労働１単位あたりの産出量）

$\frac{K}{L} = k$（労働１単位あたりの資本ストック）

加えて、ｓを貯蓄率とします。

$$\frac{\overset{\text{①}}{\mathrm{s}}\times \overset{\text{②}}{\mathrm{f}(k)}}{\underset{\text{③}}{k}} - \overset{0.05}{\delta} = \overset{\text{④}}{\mathrm{n}}$$

条件式に用意するのは、① s （貯蓄率)、② $\mathrm{f}(k)=\frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{L}}$ 、

③ $k=\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{L}}$ 、それと④ n （自然成長率）です。問題では、$k=\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{L}}$ を求めることになっています。

まず、①は貯蓄率 s ＝０．２です。また、自然成長率（n）は問題の式より n ＝０です。計算が必要なのは②になります。以下で求めていきます。

（ $\mathrm{Y}=\sqrt{\mathrm{KL}}$ は、 $\mathrm{Y}=\mathrm{K}^{\frac{1}{2}}\mathrm{L}^{\frac{1}{2}}$ に書き直すことができます。）

$$\mathrm{f}(k)=\frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{L}}=\frac{\mathrm{K}^{\frac{1}{2}}\mathrm{L}^{\frac{1}{2}}}{\mathrm{L}}=\mathrm{K}^{\frac{1}{2}}\mathrm{L}^{\frac{1}{2}}\times\mathrm{L}^{-1}=\mathrm{K}^{\frac{1}{2}}\mathrm{L}^{-\frac{1}{2}}=\left(\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{L}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

ここで、$\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{L}}=k$ なので、これを代入すると、

$\mathrm{f}(k)=k^{\frac{1}{2}}$ に整理ができます。

プロセス－５　数値をあてはめます

$\frac{\mathrm{s}\times\mathrm{f}(k)}{k}-\delta=\mathrm{n}$ 　に s 、n、δ、f(k) の数値をあてはめます。

$$\frac{0.2\times k^{\frac{1}{2}}}{k}-0.05=0$$

$0.2k^{\frac{1}{2}}=0.05k$ （両辺に k をかけ算します）

$4k^{\frac{1}{2}}=k$ （両辺に 20 をかけ算して、2 乗します）

$16k=k^2$（k で割り算します）

$k=16$　よって、3 が正解です。

◆ちょっと
成長論の問題で限界貯蓄性向は、貯蓄性向、貯蓄率などいろいろな名称で出題されますがすべて同じ意味です。

◆情報
コブ＝ダグラス関数が、
$\mathrm{Y}=\sqrt{\mathrm{KL}}$、または、
$\mathrm{Y}=\mathrm{K}^{\frac{1}{2}}\mathrm{L}^{\frac{1}{2}}$
で出題される可能性が高いので、ある程度、計算パターンを覚えておくと良いでしょう。

グラフで求めるケース　動画解説：https://youtu.be/B2lhRqnfA-s

プロセス－1　新古典派成長論の式に構成

新古典派の経済成長モデルは、「労働者 1 人あたりの～」のという視点でハロッド＝ドーマー・モデルの式を再構築していきます。

ハロッド＝ドーマー・モデル

Gw（保証成長率）　＝　Gn（自然成長率）

$$\frac{s}{w} - \delta = n$$

ここで、$\frac{1}{w} = \frac{Y}{K}$ より、以下のように書き換えられます。

$$\frac{s \times \boxed{Y}}{\boxed{K}} - \delta = n$$

労働者 1 人あたりの産出量にするために L で割り算します。→ $\frac{Y}{L} = y$

これを y、または f(*k*) とします。

労働者 1 人あたりの資本量にするために L で割り算します。→ $\frac{K}{L} = k$

これを *k* とします。

$$\frac{s \times \boxed{Y}}{\boxed{K}} - \delta = n$$

$\boxed{Y} = y$, $\boxed{K} = k$ として、

長期均衡の式はこのようになります。

Gw（保証成長率）　＝　Gn（自然成長率）

$$\frac{s \times y}{k} - \delta = n$$　（δを移行します）

$$\frac{s \times y}{k} = n + \delta$$　（両辺に *k* を掛け算します）

$$s\ y = (n + \delta)k$$　（両辺を s で割り算します）

$$y = \frac{(n + \delta)k}{s}$$ または、 $$y = \frac{n + \delta}{s}k$$

になります。

◆分数は分母・分子を同じ数字で掛け・算割り算できます。

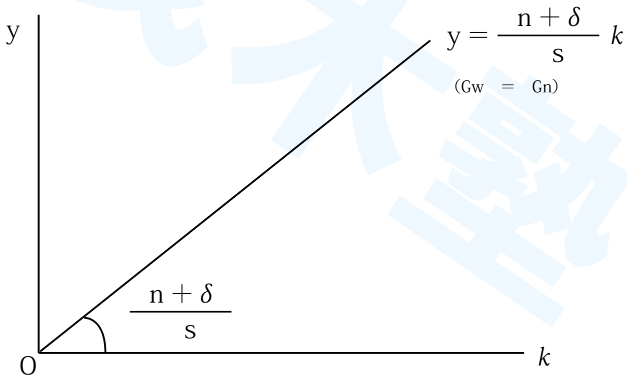
プロセス－2　**グラフ化**

$$y=\boxed{\frac{n+\delta}{s}}\,k$$

$\boxed{\dfrac{n+\delta}{s}}$ → 傾き

$y=\dfrac{n+\delta}{s}k$　は、傾き$\dfrac{n+\delta}{s}$　の一次関数になるので、

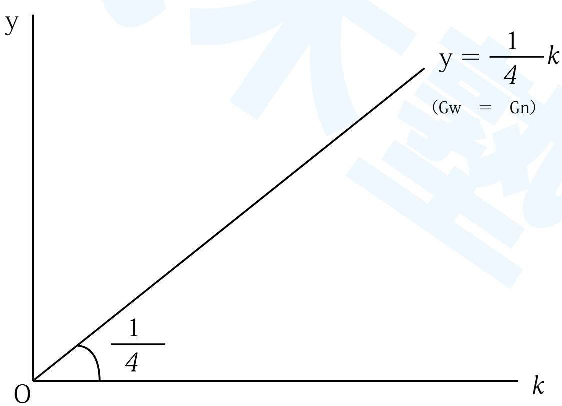
下図のように書き表せます。



問題文で与えられている労働量の成長率（n）が 0%、貯蓄率（s）が 0.2、資本減耗率が 0.05 を代入します。

$$y=\frac{\overset{0\%}{\boxed{n}}+\overset{0.05}{\boxed{\delta}}}{\underset{0.2}{\boxed{s}}}k$$

より、　$y=\dfrac{0.05}{0.2}k$　整理して、　$y=\dfrac{1}{4}k$



理論上、望ましい成長経路としてのグラフが完成します。

プロセス－３　**現実の成長経路**

次に、現実の成長経路をグラフ化させます。現実の成長経路というのは問題文のコブ＝ダグラス型の生産関数より、1 人あたりの産出量（y）によって求められます。

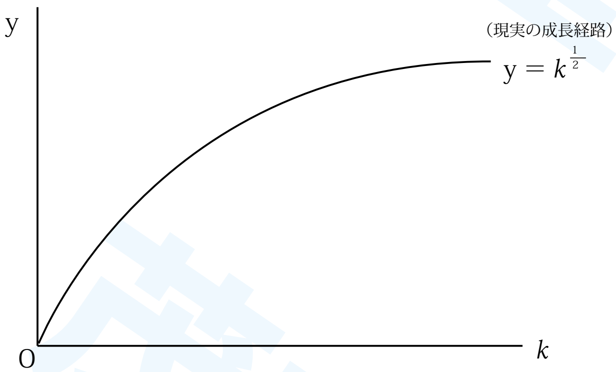
コブ＝ダグラス型の生産関数

（$Y=\sqrt{KL}$ は、$Y=K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}$ に書き直すことができます。）

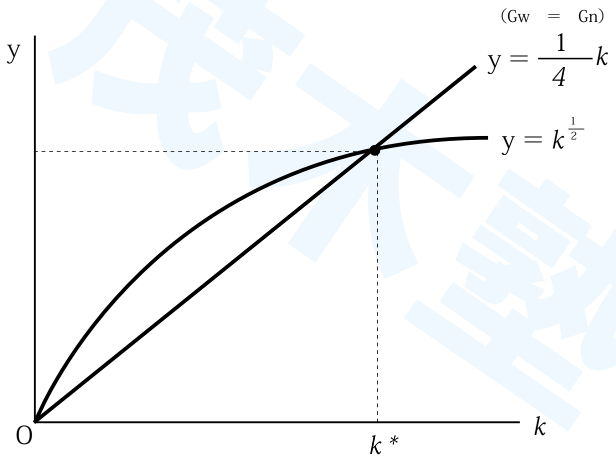
$$y=\frac{Y}{L}=\frac{K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}}{L}=K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}\times L^{-1}=K^{\frac{1}{2}}L^{-\frac{1}{2}}=\left(\frac{K}{L}\right)^{\frac{1}{2}}$$

ここで、$\frac{K}{L}=k$ なので、これを代入すると、

$y=k^{\frac{1}{2}}$ に整理ができます。



プロセス－４　**グラフをまとめる**



新古典派成長モデルでは、定常状態が維持されるので、２つのグラフの連立方程式より、労働者１人あたりの資本の大きさ（k^*）を求めます。

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{4}k \\ y = k^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

より、

$$k^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}k \quad \text{（両辺を２乗します）}$$

$$k = \frac{1}{16}k^2 \quad \text{（両辺を16倍します）}$$

$$16k = k^2 \quad \text{（両辺を} k \text{で割り算します）}$$

$$16 = k$$

労働量１単位あたりの資本の大きさ（k）は 16 になります。

以上より、３が正解です。